Σύγκλιση ακολουθιών: Δυσκολίες και παρανοήσεις
από τους μαθητές στο ΝΠΣ του Λυκείου

Γαβρίνας Κωνσταντίνος

Εργασία Εξαμήνου στα πλαίσια του Προπτυχιακού μαθήματος

591. Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού

1. Περίληψη

Με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών στο Λύκειο, που έχει δημοσιευτεί ήδη (βλ. § 8.4), επαναφέρεται στην ύλη των Μαθηματικών της Β’ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, η σύγκλιση των ακολουθιών.

Η συγκεκριμένη ενότητα υπήρχε στο Πρόγραμμα Σπουδών του Λυκείου μέχρι την δεκαετία του ’80 (βλ. § 8.3) αλλά αφαιρέθηκε, καθώς θεωρήθηκε ότι καλύπτεται από την έννοια της σύγκλισης συναρτήσεων.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει ορισμένες καλές τεχνικές εκμάθησης της συγκεκριμένης ενότητας στους μαθητές της Β’ Λυκείου σύμφωνα με την βιβλιογραφία, όπως επίσης και να επισημάνει τις αναμενόμενες δυσκολίες κατά την διδασκαλία της σύγκλισης των ακολουθιών μαζί με τις πιθανές παρανοήσεις που θα γίνουν από αυτούς.

Αναλυτικότερα, στην αρχή της εργασίας γίνεται μία εισαγωγή όπου περιγράφονται ορισμένες σύγχρονες απόψεις σχετικά με την διδασκαλία των μαθηματικών.

Στην συνέχεια περιγράφεται το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών στα Μαθηματικά σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες, δίνεται ένα θεωρητικό υπόβαθρο και ένα προτεινόμενο σχέδιο μαθήματος.

Τέλος περιγράφονται τα Φύλλα Εργασίας που θα δοθούν στους μαθητές, μαζί με τις πιθανές αναμενόμενες απαντήσεις που θα δώσουν μαζί με τα πιθανά λάθη που θα κάνουν και τις δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουν.

Γενικότερα ελπίζω ότι τα νέα βιβλία που θα συγγραφούν βάσει του ΝΠΣ να είναι καλύτερα από όλες τις απόψεις σε σχέση με τα υπάρχοντα, με όσο το δυνατόν λιγότερα λάθη και αβλεψίες (π.χ. το τυπογραφικό λάθος, όπου λείπει ο προσθετέος $\frac{\nu-2}{\nu}$, είναι παρόν εδώ και χρόνια, αλλά κανείς δεν έχει σκεφτεί να το διορθώσει[1]).

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1+\frac{\nu-1}{\nu}+\frac{\nu-3}{\nu}+...+\frac{1}{\nu}$.

Λέξεις κλειδιά: Ακολουθίες, σύγκλιση ακολουθιών, σύγκλιση σειρών, συγκλίνουσες ακολουθίες, αποκλίνουσες ακολουθίες, ΝΠΣ, Νέο Πρόγραμμα Σπουδών.

[1] Άσκηση 11, σελ. 131, Αριθμητικές πρόοδοι, Μαθηματικά Α’ Λυκείου.

2. Abstract

The New Curriculum in Greek High School (Lyceum – 3 grades – ages 15-18), which has already been published (§ 8.4), introduces the convergent sequences in the 2nd grade of Lyceum for the students of Mathematics in the Science Orientation.

This topic existed in Mathematic curriculum until the late ‘80s (§ 8.3) but was removed later as it was thought to be part of the convergent functions topic.

The purpose of this paper is to present some good students’ teaching techniques about convergent sequences, according to the literature, as well as to point out the expected student difficulties in teaching convergent sequences and the possible misunderstandings that may arise.

In the beginning of the paper there is an introduction where some contemporary views on the teaching of mathematics are being mentioned.

Afterwards, there is a description of the convergent sequences topic in the New Curriculum, a theoretical aspect and a suggested lesson plan.

Finally, Students’ Worksheets are being described, along with the expected answers that students will provide, as well as the possible mistakes and difficulties that they will face.

Keywords: Sequences, convergence of sequences, convergence of series, convergent sequences, divergent sequences.

3. Εισαγωγή

Η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση (conceptual and procedural knowledge) είναι γνωστό ότι είναι δύο τύποι γνώσης που χρειάζονται οι μαθητές για να μπορέσουν να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες (Rittle-Johnson & Alibali, 1999).

Η εννοιολογική γνώση είναι η γνώση μαθηματικών γεγονότων και ιδιοτήτων που σχετίζονται με κάποιο τρόπο. Δεδομένου ότι η εννοιολογική γνώση περιλαμβάνει την ερμηνεία των εννοιών και την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ τους, μερικές φορές ονομάζεται επίσης εννοιολογική κατανόηση.

Η διαδικαστική γνώση προσδιορίζεται ως το σύνολο κανόνων και αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Morales, 2014).[2] Η διαδικαστική γνώση ορίζεται από δύο διακριτά τμήματα που την απαρτίζουν: το πρώτο τμήμα της διαδικαστικής γνώσης περιλαμβάνει τα σύμβολα και την γλώσσα των μαθηματικών, ενώ το δεύτερο τμήμα περιλαμβάνει τους κανόνες, τις πράξεις, τις οπτικές αναπαραστάσεις και

[2] Σημειώνεται ότι ο Skemp (1978, 1987) αναφέρεται σε δύο μορφές κατανόησης στα μαθηματικά που ονόμασε σχεσιακή κατανόηση και ενόργανη κατανόηση, οι οποίες είναι παρόμοιες με την εννοιολογική γνώση και την διαδικαστική γνώση αντίστοιχα. Ένα άτομο με ενόργανη κατανόηση γνωρίζει και χρησιμοποιεί αποτελεσματικά κανόνες στα μαθηματικά, αλλά δεν καταλαβαίνει γιατί αυτοί οι κανόνες λειτουργούν, ενώ η σχεσιακή κατανόηση εξηγείται ως η γνώση του τι γίνεται και γιατί.

τους αλγόριθμους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Rittle-Johnson & Alibali, 1999).

Παραδείγματα ερωτήσεων διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης	
Ερωτήσεις που χρησιμοποιούν διαδικαστικές γνώσεις	**Ερωτήσεις που χρησιμοποιούν εννοιολογικές γνώσεις**
Μετρήστε την περίμετρο του δωματίου.	Υπολογίστε την περίμετρο του δωματίου. Να αιτιολογήσετε την εκτίμησή σας.
Εάν κοιμόσαστε για 7,5 ώρες κάθε ημέρα, ποιο ποσοστό της ημέρας αφιερώνεται στον ύπνο;	Είναι λογικό να πούμε ότι πολλοί άνθρωποι κοιμούνται το 30% της ημέρας; Γιατί ναι ή όχι;
Βρείτε το άθροισμα ⅓ + ¼ + ⅕.	Χωρίς πρόσθεση, το άθροισμα ⅓ + ¼ + ⅕ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 1; Πως το ξέρετε;
Αντιστοιχίστε το αντικείμενο με τον σωστό τύπο για τον όγκο του (δίνονται σχήματα και τύποι).	Εξηγήστε πώς αποφασίσατε ότι έχετε αντιστοιχίσει το κάθε αντικείμενο με τον σωστό τύπο για τον όγκο του (δίνονται σχήματα και τύποι).
Πολλαπλασιάστε το 20 με το 8.	Με το μυαλό, πολλαπλασιάστε το 20 με το 8. Εξηγήστε την μέθοδό σας. Προσπαθήστε να βρείτε μια άλλη σωστή μέθοδο.
Βρείτε την εξίσωση για να λύσετε αυτό το πρόβλημα (δίνεται ένα πρόβλημα).	Βρείτε ένα πρόβλημα που μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας αυτήν την εξίσωση. Πώς μπορείτε να διαπιστώσετε ότι έχετε βρει σωστό πρόβλημα; (δίνεται μία εξίσωση).

Πηγή: https://teachingmathliteracy.weebly.com/conceptual-vs-procedural-knowledge.html

Η εννοιολογική γνώση μπορεί να θεωρηθεί όχι μόνον ως μια γνώση των εννοιών αλλά και ως κατανόηση εννοιολογικής γνώσης μαζί με μαθηματικές διαδικασίες, βαθιές σχέσεις και πλούσιες συνδέσεις. (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Με άλλα λόγια (Star, 2005), μπορεί να υπάρχει μεγάλη ποικιλία από διεργασίες εκτός από αλγόριθμους ή κανόνες και οι διεργασίες σε κάθε διαδικασία μπορεί να είναι διαφορετικές σε επίπεδο πολυπλοκότητας ή σχέσεων. Έτσι, η διαδικαστική κατανόηση από τον μαθητή περιλαμβάνει την κατοχή μιας ιδέας για την τυπική γλώσσα ή συμβολικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών και την δυνατότητα χρήσης σχετικών διαδικασιών αποτελεσματικά και με ακρίβεια, κάνοντας συνειδητές επιλογές.

Έχει παρατηρηθεί ότι μαθητές με υψηλά επίπεδα εννοιολογικής γνώσης/κατανόησης μπορούν να λύσουν προβλήματα που δεν έχουν συναντήσει ποτέ πριν (Ghazali & Zakaria, 2011). Επιπλέον, εάν η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση αναπτυχθούν στους μαθητές, αυτό θα έχει θετικό αντίκτυπο στην κατανόηση και άλλων ευρύτερων εννοιών (Schneider & Stern, 2005).

Επιπλέον, οι μαθητές που δεν είναι σε θέση να εξισορροπήσουν την εννοιολογική κατανόηση και την διαδικαστική γνώση, δεν μπορούν να έχουν τα πλήρη εφόδια για την εκμάθηση ενός μαθηματικού θέματος (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Καθώς λοιπόν, η σχέση μεταξύ της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης είναι πολύ σημαντική, οι μαθητές κατά την εκμάθηση των συγκλινουσών ακολουθιών (και όχι μόνο) θα πρέπει να κατευθύνονται στην κατάκτηση της εννοιολογικής γνώσης έχοντας ως εφόδιο την διαδικαστική γνώση. Εν ολίγοις, λαμβάνοντας υπόψη ότι η εννοιολογική γνώση αναφέρεται στην πλήρη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, δεν είναι δυνατόν για τους μαθητές που δεν μπορούν να συνειδητοποιήσουν την εννοιολογική κατανόηση να δουν τις σχέσεις που περιλαμβάνονται σε διάφορες περιπτώσεις προβλημάτων.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο προσοχής, είναι η αποσαφήνιση πως η εννοιολογική και η διαδικαστική κατανόηση δεν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη, αλλά αλληλοϋποστηρίζονται, προκειμένου να ξεπεραστούν οι μαθησιακές δυσκολίες. Με άλλα λόγια, οι μαθητές με ανεπαρκείς διαδικαστικές γνώσεις δυσκολεύονται να λύσουν ένα πρόβλημα ακόμα κι αν το κατανοούν, ενώ εκείνοι με ανεπαρκείς εννοιολογικές γνώσεις δεν μπορούν να καταλάβουν πλήρως τι έχουν κάνει ακόμα κι αν λύσουν το πρόβλημα!

Τελικά είναι προφανής η σημασία της χρήσης με ισορροπημένο τρόπο της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης στην μαθηματική εκπαίδευση. Οι μαθητές δεν μπορούν να δείξουν πως κατέχουν την απαιτούμενη μαθηματική ικανότητα εάν υπολείπονται σε κάποια από τις δύο γνώσεις ή εάν τις αξιοποιούν χωριστά χωρίς να τις συσχετίζουν μεταξύ τους (Rittle-Johnson & Alibali, 1999).

Επομένως, η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τις ακολουθίες και τις σειρές μπορούν να παίξουν από κοινού έναν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των λάθη που προκύπτουν κατά τον ανακάλυψη των ιδιοτήτων των άπειρων ακολουθιών ή σειρών, κάτι που είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα ζητήματα που συναντούν/βασανίζουν συχνά πολλούς μαθητές.

4. Θεωρητικό πλαίσιο

4.1. Νέο Πρόγραμμα Σπουδών

Σύμφωνα με το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής: «*Τα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) είναι απαραίτητο να αντανακλούν όλες τις αλλαγές στα πεδία των επιστημών που ασχολούνται ή φωτίζουν την εκπαίδευση, τις αλλαγές σε κοινωνικό επίπεδο, όπως και τις ιλιγγιώδεις αλλαγές σε τεχνολογικό επίπεδο*».[3]

Για παράδειγμα, στα Μαθηματικά η θεματική ενότητα «Μοτίβο-Συναρτήσεις» παραμένει σταθερή από τα Μαθηματικά της Α’ Δημοτικού ως και τα Μαθηματικά του Λυκείου: αρχικά, ο μαθητής αναγνωρίζει απλά αριθμητικά μοτίβα, έπειτα πιο σύνθετα αριθμητικά μοτίβα, κατόπιν αντιμετωπίζει γλωσσικά, συμβολικά και γεωμετρικά μοτίβα, ενώ στο Λύκειο φτάνει στην αναγνώριση και μελέτη πληθυσμιακών μοτίβων, όπως είναι οι δημογραφικές μεταβολές σε διάφορες χώρες ή τα κρούσματα COVID-19.[4]

Από την άλλη, η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία κατηγορεί το ΙΕΠ ότι τα νέα προγράμματα για το μάθημα των μαθηματικών είναι «*… εκτός παιδαγωγικού τόπου και χρόνου…*», αναφέροντας: «*Εάν προσπεράσουμε την ατυχή επινόηση και αναφορά που έγινε κατά την ενημέρωση στην έννοια μοτίβο-συνάρτηση που διασχίζει την εκπαίδευση από την Προσχολική Ηλικία έως και το Λύκειο, θα δούμε τις ακριβοπληρωμένες επεξεργασίες του ΙΕΠ να αγνοούν ή να αποσιωπούν τις συλλογικά καταγεγραμμένες εμπειρίες της εκπαιδευτικής μαθηματικής*

[3] http://iep.edu.gr/el/nea-programmata-spoudon-arxiki-selida
[4] https://www.minedu.gov.gr/ news/1974-trexouses-metarrythmiseis/50654-nea-programmata-spoudon-sto-sxoleio-neo-periexomeno-psifiaki-diastasi-sto-epikentro-oi-mathites

κοινότητας για συγκεκριμένες δυσχέρειες και ασυμβατότητες από την εφαρμογή των εν ισχύ Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών».[5]

Στο γενικότερο αυτό πλαίσιο του ΝΠΣ, εντάσσεται και η ενότητα «Συγκλίνουσες ακολουθίες» στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β' Λυκείου που επανέρχεται μετά από τρεις δεκαετίες απουσίας. Αυτή είναι μέρος στο *Θεματικό Πεδίο: Ανάλυση* και ανήκει στην γενικότερη *Θεματική ενότητα: Σύγκλιση*, όπως φαίνεται και στις σελίδες 42 & 43 του ΝΠΣ:[6]

Προσδοκόμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

- *Αν.Σ.11.Π.1.*
  Διερευνούν μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης την αναγκαιότητα εισαγωγής των άπειρων διαδικασιών και της σύγκλισης ακολουθίας.
- *Αν.Σ.11.Π.2.*
  Διερευνούν αριθμητικά και γραφικά τη σύγκλιση και τη μη σύγκλιση ακολουθιών της μορφής:
  - $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$
  - $\alpha_\nu = \alpha^\nu$ *με* $|\alpha| < 1$
  - $\alpha_\nu = (-1)^\nu$
- *Αν.Σ.11.Π.3.*
  Συμπεραίνουν εμπειρικά ότι μια ακολουθία μονότονη και φραγμένη συγκλίνει.
- *Αν.Σ.11.Π.4.*
  Μέσω προβλήματος μοντελοποίησης οδηγούνται στην ακολουθία $\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$, *συμπεραίνουν διαισθητικά ότι συγκλίνει και συμβολίζουν το όριό της με e.*
- *Αν.Σ.11.Π.5*
  Προσδιορίζουν αθροίσματα άπειρων όρων γεωμετρικών προόδων με λόγο λ, όπου $|\lambda| < 1$.
- *Αν.Σ.11.Π.6.*
  Εφαρμόζουν τη μέθοδο του Ήρωνα για να προσεγγίσουν την τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

- *Έργα μέσα από τα οποία αναγνωρίζεται η αναγκαιότητα των άπειρων διαδικασιών, μέσω προβλημάτων προσέγγισης άγνωστων ποσοτήτων με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια, όπως π.χ. η προσέγγιση του εμβαδού κύκλου από τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων.*
- *Αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στη διερεύνηση της σύγκλισης ή της μη σύγκλισης ακολουθιών.*
- *Έργα μέσα από τα οποία γίνεται διερεύνηση ως προς το αν μια ακολουθία είναι μονότονη και/ή φραγμένη αριθμητικά και/ή μέσω της γραφικής της παράστασης.*
- *Εισαγωγή του αριθμού e, μέσω κατάλληλου προβλήματος, για παράδειγμα ανατοκισμού.*

[5] https://www.ethnos.gr/greece/article/183188/neaprogrammataspoydonagriakontragiatamathhmatikastasxoleia

[6] https://iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide/view-file?fid=6947c3b732bf63dd327e5d668255f26f8797657c876b4e0242af6f453e4c1636
και
http://www.et.gr/idocs-nph/search/pdfViewerForm.html?args=5C7QrtC22wEzH9d6xfVpRXdtvSoClrL8zT3FrY18BEPNZ8op6Z_wSuJInJ48_97uHrMts-zFzeyCiBSQOpYnTy36MacmUFCx2ppFvBej56Mmc8Qdb8ZfRJqZnsIAdk8Lv_e6czmhEembNmZCMxLMtb-AGgDHtI-Z5VOEhJA4ZNpNdGXxHDkjDgjpwPde9pvT

4.2. Προτεινόμενοι τρόποι διδασκαλίας

Σύμφωνα με τον Lecorre (2016), τρεις τύποι λογικής είναι απαραίτητοι για την κατανόηση των μαθησιακών διαδικασιών των μαθητών στη μελέτη των ορίων:

- Η ρεαλιστική λογική που συνίσταται αυστηρά στην εξέταση συγκεκριμένων περιπτώσεων, ενώ δεν γίνεται προσπάθεια γενίκευσης των παρατηρήσεων.
- Η εμπειρική λογική που χρησιμοποιείται όταν πρόκειται να επιτευχθεί ένας γενικός νόμος, με τα γεγονότα να χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή γενικεύσεων.
- Η θεωρητική λογική η οποία ξεκινά με τη θεωρία (θεωρήματα, ιδιότητες, ορισμοί, αξιώματα κ.λπ.) για τη δημιουργία νέων εννοιών, κανόνων και θεωρημάτων.

Σε αυτό το πλαίσιο έχουν σχεδιαστεί οι δραστηριότητες για τις συγκλίνουσες ακολουθίες, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να συνδέσουν συλλογισμούς διαφορετικών ειδών, γεφυρώνοντας την εμπειρική και πραγματιστική λογική με την θεωρητική.

Λαμβάνοντας επίσης υπόψιν την κονστρουκτιβιστική θεωρία (Davis, Maher & Noddings, 1990, Piaget, 1973, Steffe & Gale, 1995), δεχόμαστε ότι οι μαθητές δεν μαθαίνουν μια έννοια απλώς ακούγοντας ή διαβάζοντας τον ορισμό της, αλλά προσαρμόζοντας σταδιακά τις γνωστικές τους δομές στα προβλήματα που τους δίνεται η ευκαιρία να λύσουν.

Τέλος, υπάρχουν και οι παρακάτω γενικότερες παρατηρήσεις για την οργάνωση του μαθήματος:

Η διαδικασία (διδακτική κατάσταση) ξεκινά με τον δάσκαλο να παρουσιάζει το θέμα και να ξεκινά μία συζήτηση θέτοντας κατάλληλες ερωτήσεις με βάση τα παραδείγματα που δίνει.

Κατά την παρακολούθηση της συζήτησης, ο δάσκαλος πρέπει να επιμείνει ώστε οι μαθητές όχι μόνο να λένε ότι συμφωνούν με την μία ή την άλλη άποψη αλλά και να εξηγούν τη γνώμη τους.

Ο δάσκαλος πρέπει να ενεργεί ως συμμετέχων στη συζήτηση, αλλά και να χρησιμοποιεί κάθε ευκαιρία για να τονώσει τη δραστηριότητα των μαθητών, εφιστώντας την προσοχή τους στα βασικά ζητήματα, βοηθώντας να αποκαλυφθούν αντιφάσεις ή λάθη και να ξεπεραστούν δυσκολίες.

Η ατμόσφαιρα της συζήτησης στην τάξη πρέπει να κάνει τις δυσκολίες και τα λάθη να φαίνονται ως κάτι αναπόφευκτο και εποικοδομητικό για την ανάπτυξη μιας σωστής κατανόησης (Hadamard, 1949).

Οι μαθητές πρέπει να αποβάλουν τον φόβο να προτείνουν υποθέσεις και να βγάλουν συμπεράσματα δημόσια καθώς έχει παρατηρηθεί ότι τέτοιος φόβος είναι αρκετά συνηθισμένος.

Ο Schüler-Meyer (2018) παρουσίασε μια μελέτη που εμπλέκει τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην επαναδημιουργία του ορισμού των συγκλινουσών ακολουθιών. Προτείνει ότι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες καθορισμού εννοιών σε μία πορεία από τις πειραματικές προς τις τυπικές προσεγγίσεις μπορεί να βοηθήσει στην άμβλυνση ζητημάτων που αναγκάζουν τους μαθητές να μην χρησιμοποιούν τους ορισμούς ως αφετηρία για την συλλογιστική τους για τις έννοιες. Η μελέτη αναδεικνύει τον ρόλο των προηγούμενων εμπειριών των μαθητών με τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην επαναδημιουργία του ορισμού.

Για παράδειγμα (ερχόμενοι στο συγκεκριμένο θέμα της εργασίας), σύμφωνα με την βιβλιογραφία υπάρχουν διάφοροι τρόποι περιγραφής μιας ακολουθίας (Education Services Australia, 2013):

- Με αναγραφή των πρώτων όρων
- Με τύπο για τον γενικό όρο
- Με αναδρομική σχέση

Η αναγραφή των πρώτων όρων δεν είναι πολύ καλή μέθοδος, αφού ο εκπαιδευτικός μπορεί να «πιστεύει» ότι υπάρχει ένα σαφώς καθορισμένο μοτίβο, αλλά στην πραγματικότητα να υπάρχουν και άλλα. Για παράδειγμα, αν γράψουμε μόνο: 1, 2, 4, … ο επόμενος όρος είναι πιθανό να είναι το 8 (ως δυνάμεις του 2: $\alpha_\nu = 2^\nu$), το 7 (η ακολουθία του τεμπέλη σερβιτόρου - Lazy Caterer's sequence: $\alpha_{\nu+1} = \frac{\nu^2+\nu+2}{2}$) ή κάτι άλλο εάν υπάρχει ποιο σύνθετος τύπος.

Πολύ καλύτερα είναι τα πράγματα εάν χρησιμοποιηθεί ο τύπος για τον γενικό όρο, που δεν αφήνει περιθώρια για παρανοήσεις στις ακολουθίες. Π.χ. $\alpha_\nu = 2^\nu$ ή $\alpha_{\nu+1} = \frac{\nu^2+\nu+2}{2}$.

Σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι εύκολο, ή ακόμη και δυνατό, να δοθεί τύπος για τον γενικό όρο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορεί να είναι δυνατός ο προσδιορισμός ενός όρου στην ακολουθία σε σχέση με ορισμένους προηγούμενους όρους αναδρομικά. Για παράδειγμα, η ακολουθία (Fibonacci) *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …* έχει αναδρομικό τύπο $F_\nu = F_{\nu-2} + F_{\nu-1}$ με $F_1 = 1,\ \ F_2 = 1$, που προφανώς είναι καλύτερος από τον $F_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu\right\}$.

4.3. Αναμενόμενες δυσκολίες, πιθανά λάθη και παρανοήσεις

Όπως αναφέρει η Elias (2019), η διαδικασία κατασκευής γνώσης δεν ήταν εύκολη για τους μαθητές και οι περισσότερες από τις νέες κατασκευές γνώσης συνέχιζαν να είναι εύθραυστες για αυτούς ακόμα και στο τέλος μιας δραστηριότητας. Ο πιθανός κύριος λόγος για αυτό είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος της νέας γνώσης είναι αφηρημένου χαρακτήρα και αυτό το είδος γνώσης είναι κάτι καινούργιο για τους μαθητές.

Πολύ παλιότερα, οι Tall και Schwarzenberger (1978) ισχυρίζονταν ότι τα περισσότερα από τα μαθηματικά στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελούνται από περίπλοκες έννοιες «μεταφρασμένες» σε μορφή κατάλληλη για διδασκαλία. Αυτή όμως η διαδικασία μετάφρασης δεν είναι δίχως κινδύνους. Από την μία, το να «μιλάμε απλοποιημένα» για μια έννοια υψηλού επιπέδου μπορεί να οδηγήσει σε απώλεια ακρίβειας και μπορεί να αυξήσει την εννοιολογική δυσκολία. Από την άλλη, η μη-τυπική γλώσσα που χρησιμοποιείται στην «μετάφραση» των εννοιών μπορεί να δημιουργεί εννοιολογικές παρεξηγήσεις προερχόμενες από καθημερινές ιδέες ή αντιλήψεις.

Οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών που μαθαίνουν μαθηματικά, ειδικά σε τομείς της ανάλυσης, έχουν διερευνηθεί και αναφερθεί από αρκετούς ερευνητές και εκπαιδευτικούς (Martin, 2009, Martínez-Planell Gonzalez, DiCristina & Acevedo, 2012, Monaghan, 2001, Orton, 1983, Tall & Schwarzenberger, 1978).

Κάποιες από τις μελέτες αυτές έχουν δείξει ότι οι μαθητές που παρακολουθούν μαθήματα ανάλυσης έχουν δυσκολία στην εννοιολογική κατανόηση επειδή έχουν μια πολύ επιφανειακή και ανεπαρκή κατανόηση των βασικών εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης λόγω της καθιερωμένης διδασκαλίας μάθησης (Steen, 1988, White & Mitchelmore, 1996).

Αυτές οι δυσκολίες προέρχονται κυρίως από την αδυναμία κατανόησης της έννοιας του άπειρου ή από έναν αρκετά περίπλοκο εννοιολογικό ορισμό του ορίου (Tall, 1992, Tall & Vinner, 1981).

Πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν επίσης παρόμοιες δυσκολίες στην κατανόηση της σύγκλισης μιας ακολουθίας, που είναι μια από τις σημαντικές έννοιες της ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, οι ακολουθίες και οι σειρές είναι τα πιο θεμελιώδη θέματα σε κάθε μάθημα ανάλυσης και μπορούν να χρησιμεύσουν ως βάση για τα άλλα θέματα του λογισμού, συμπεριλαμβανομένων των ορίων, της συνέχειας, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων. Από την άλλη όμως, οι Tall και Schwarzenberger (1978) υποστήριξαν ότι οι ακολουθίες είναι μία από τις σημαντικές «ανωμαλίες» του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών. Πολλοί μαθητές που συναντούν ακολουθίες άπειρων όρων για πρώτη φορά, δεν μπορούν να κατανοήσουν τη μαθηματική τους ουσία, ούτε τις απλές διαδικασίες και λύσεις που σχετίζονται με αυτές, θεωρώντας τες ως ένα από τα δυσκολότερα αντικείμενα στα μαθηματικά (Monaghan, 2001, Nardi, Biza & González-Martín, 2008).

Επιπλέον, το γεγονός ότι μια άπειρη σειρά είναι ένα άπειρο άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας ή ότι το όριο μιας άπειρης σειράς είναι ίσο με το όριο μιας ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της σειράς έχει οδηγήσει στην ιδέα ότι η έννοια των ακολουθιών είναι πιο ουσιώδης από την έννοια της σειράς. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η έννοια της σειράς να έχει παραμεριστεί αυτόματα στο πρόγραμμα σπουδών και ως εκ τούτου στα σχολικά βιβλία.

Σε μια μελέτη των Alcock και Simpson (2009), αφού έγινε ο ορισμός της σύγκλισης του αθροίσματος άπειρων όρων μίας ακολουθίας στην αίθουσα διδασκαλίας, οι μαθητές κλήθηκαν να τον εξηγήσουν με δικές τους προτάσεις. Εκεί φάνηκε ότι οι μαθητές διέφεραν στις εξηγήσεις τους κατά τον ορισμό της σύγκλισης του αθροίσματος και ότι οι περισσότεροι από αυτούς δεν μπορούσαν να επιτύχουν επαρκές επίπεδο κατανόησης σχετικά με τον ορισμό. Ομοίως, σε άλλες μελέτες, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να κατανοήσουν τι σημαίνει η σύγκλιση του αθροίσματος και έδειξαν ανεπαρκή κατανόηση της εύρεσης εάν μια σειρά ήταν συγκλίνουσα ή όχι (Martínez-Planell, Gonzalez, DiCristina & Acevedo, 2012).

Επιπλέον, φάνηκε ότι ορισμένοι μαθητές δυσκολεύονται με την έννοια του άπειρου καθώς και πως αποδέχονται το γεγονός ότι ένα κριτήριο σύγκλισης μπορεί να είναι ασαφές (Champney, 2013, Sierpińska, 1987) και να μην βγάζει αποτέλεσμα.

Ένα παράδειγμα που δίνεται από τους Tall και Schwarzenberger (1978) είναι ο ορισμός μιας ακολουθίας s_n πραγματικών αριθμοί που τείνουν σε ένα όριο s: «*δεδομένου οποιουδήποτε θετικού πραγματικού αριθμού ε >0, υπάρχει N (το οποίο μπορεί να εξαρτάται από το ε) έτσι ώστε* $|s_n - s| < \varepsilon$ *για όλα τα n>N*». Μια άτυπη μετάφραση μπορεί να είναι «Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα s_n όσο πιο κοντά στο s θέλουμε, κάνοντας το n αρκετά μεγάλο». Η απώλεια όμως στην σαφήνεια είναι σημαντική: δεν έχουμε διευκρινίσει πόσο κοντά στο s θέλουμε, πόσο μεγάλο είναι το n, ούτε την σχέση των δύο τους.

Και ακόμα, τι σημαίνει η φράση «*όσο πιο κοντά στο s θέλουμε*»; Τι θα συμβεί εάν εμείς δεν θέλουμε; Μπορούμε να πλησιάσουμε απείρως κοντά;

Άλλη έννοια της συνήθους ομιλίας που έχει αυτή η πρόταση είναι ότι το *κοντά* σημαίνει *πλησίον* αλλά όχι *συμπίπτον*. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει την υπόνοια ότι η ακολουθία s_n μπορεί να είναι κοντά, αλλά αποκλείεται να είναι ίση με το s.

Η Sierpińska (1990) εξέτασε τις πρωτογενείς διαισθήσεις σχετικά με τα όρια σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που δεν έχουν ακόμη μάθει τον επίσημο ορισμό τους. Πήρε μια ακολουθία άπειρων όρων, τα επιστημολογικά εμπόδια που προκύπτουν από αυτήν και τις ενέργειες που εμπλέκονται για την υπέρβασή τους.

Μερικά από αυτά τα εμπόδια για την κατανόηση των ορίων αφορούν στην κατανόηση των ακολουθιών άπειρων όρων και του απείρου. Για παράδειγμα, η αντίληψη μιας ακολουθίας ως κανόνα για την παραγωγή αριθμών ή ως ένας «πολύ μακρύς» κατάλογος αριθμών είναι αντιλήψεις που μπορεί να λειτουργούν ως εμπόδια στην κατανόηση της σύγκλισης σε όριο.

Κάποιες αντιλήψεις για το άπειρο, όπως η πεποίθηση πως ό,τι είναι άπειρο είναι και απεριόριστο, έχουν αναγνωριστεί από την Sierpińska ως επιπλέον εμπόδια για την κατανόηση των ορίων.

Η Sierpińska επέλεξε μια πρόταση/ορισμό για μια συγκλίνουσα ακολουθία: «*Σχεδόν όλοι οι όροι μίας ακολουθίας αριθμών με άπειρους όρους, προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό που ονομάζεται όριό της*»[7]. Στην συνέχεια προσδιόρισε 25 πράξεις κατανόησης[8], έξι από τις οποίες σχετίζονται στενά με τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας. Οι υπόλοιπες είχαν γενικότερο χαρακτήρα και αφορούσαν το αναγνώριση των άπειρων ακολουθιών μεταξύ άλλων μαθηματικών αντικειμένων, την καθολική σύλληψη της ιδέας της συγκλίνουσας ακολουθίας, την φύση του απείρου στα μαθηματικά ή βασικές έννοιες όπως αριθμός, ακολουθία, συμβολική γλώσσα.

Οι έξι πράξεις κατανόησης που σχετίζονται με τον ορισμό μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι:[9]

1. Προσδιορισμός της λέξης «προσέγγιση» (πράξη 12η).
   Στην κατανόηση των ορίων υπάρχει μία ιδιαίτερα αρνητική πεποίθηση πως αυτό που είναι άπειρο είναι απαραίτητα και απεριόριστο.
   Από την άλλη, όλες οι συγκλίνουσες ακολουθίες είναι φραγμένες.
   Έτσι, η μετατόπιση της προσοχής από το πολύ μεγάλο πλήθος των όρων της ακολουθίας προς την τιμή κάθε όρου, μπορεί να οδηγήσει στην ανακάλυψη ενός «φραγμένου απείρου».

2. Σχέση της έννοιας «προσέγγιση» ως προς τους αριθμούς (πράξη 13η).
   Η έννοια του όρου «προσέγγιση» εξαρτάται από το πλαίσιο χρήσης της: είναι διαφορετική στον χώρο των αριθμών και διαφορετική στον χώρο της γεωμετρίας ή φυσικής.

3. Διάκριση μεταξύ ακολουθιών Cauchy και συγκλινουσών ακολουθιών (πράξη 14η).

[7] Sierpińska, 1990, σελ. 29.
[8] Οι πράξεις κατανόησης (acts of understanding) περιγράφουν τις κρίσιμες στιγμές στη διαδικασία διαμόρφωσης μίας έννοιας και είναι οι ακόλουθες τέσσερις: ταύτιση, διάκριση, γενίκευση και σύνθεση (Sierpińska, 1994, σελ. 39(56)).
[9] Sierpińska, 1990, σελ. 32-33.

Μερικές φορές οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν το «*οι όροι πλησιάζουν*» ως «*οι όροι πλησιάζουν κάτι*» αλλά ως «*οι όροι πλησιάζουν μεταξύ τους*». Μια διαίσθηση όπως «*η σύγκλιση συνίσταται σε μείωση της απόστασης μεταξύ των όρων της ακολουθίας*» είναι αυτή που σχετίζεται με τις ακολουθίες Cauchy (Βασικές ακολουθίες) αντί με τις συγκλίνουσες ακολουθίες.
Αυτή η κατανόηση είναι ένα σημαντικό βήμα προς την κατανόηση της έννοιας του ορίου, ακόμα κι αν δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ τους στους πραγματικούς αριθμούς (ενώ υπάρχει π.χ. στους ρητούς, όπως με την $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \to e$).

4. Προσδιορισμός του «στόχου» της «προσέγγισης» (δηλ. του ορίου της ακολουθίας) (πράξη 15η).

5. Διάκριση μεταξύ του «προσεγγίζουμε» και του «προσεγγίζουμε όσο κοντά θέλουμε» (πράξη 16η).
Για παράδειγμα, η ακολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$ όντως πλησιάζει το –1 ή το –10, αλλά δεν πλησιάζει τόσο πολύ όσο μπορεί να θέλαμε! Αντίθετα, μπορεί και πλησιάζει το 0 όσο κοντά θέλουμε.

6. Διάκριση μεταξύ του «*απείρως πολλοί όροι πλησιάζουν το όριο*» και του «*σχεδόν/τελικά όλοι οι όροι πλησιάζουν το όριο*» (πράξη 17η).
Αυτή η διάκριση φαίνεται μεταξύ των ακολουθιών $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ και $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{8}$, ... Και στις δύο ακολουθίες απείρως πολλοί όροι τείνουν προς το μηδέν, αλλά μόνο στην πρώτη, σχεδόν/τελικά όλοι οι όροι τείνουν στο μηδέν.

Η Przenioslo (2005) χρησιμοποίησε ένα διδακτικό εργαλείο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να συνειδητοποιήσουν πτυχές της τυπικής έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας. Πιστεύει ότι ένας από τους λόγους των λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας είναι η χρήση στην διδασκαλία, ενός περιορισμένου φάσματος «τυποποιημένων» παραδειγμάτων που αποτυγχάνουν να αναδείξουν τις λεπτομέρειες του επίσημου ορισμού.

Πρότεινε ένα ειδικά σχεδιασμένο σύνολο ακολουθιών, που επιλέχθηκαν ώστε να περιλαμβάνουν τις διάφορες δυνατότητες που σχετίζονται με την σύγκλιση στον αριθμό 1 (βλ. § 6.2). Μια σκέψη κατά την δημιουργία αυτού του συνόλου των ακολουθιών ήταν να αντιμετωπιστούν άμεσα ορισμένες από τις βασικές δυσκολίες που συνδέονται με την κατανόηση της έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας (για παράδειγμα, η διαισθητική πεποίθηση ότι οι όροι της δεν επιτρέπεται να φτάσουν στο όριο).

Σε μία άλλη προσέγγιση, η Przenioslo θεώρησε ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην μάθηση των μαθηματικών και έτσι αφιέρωσε πολύ χώρο και χρόνο για δραστηριότητες γραφικής παράστασης ακολουθιών. Αυτές οι δραστηριότητες αναμένεται να βοηθήσουν τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι ορισμένες ακολουθίες, από έναν συγκεκριμένο δείκτη και μετά, αρχίζουν να συμπεριφέρονται με έναν συγκεκριμένο τρόπο, ενώ κάτι τέτοιο δεν ισχύει για άλλες. Επιπλέον, κατά την σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων των ακολουθιών, υπάρχει η σκέψη/ελπίδα ότι οι μαθητές θα παρατηρήσουν την μη συνάφεια ενός πεπερασμένου αριθμού αρχικών όρων σε σχέση με τους υπόλοιπους.

Σύμφωνα με την εμπειρία της Przenioslo, η διδακτική προσέγγιση είναι μία εργασία που γίνεται σε μικρές ομάδες και ακολουθείται από συζήτηση με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Αυτή αποδείχθηκε μια αποτελεσματική μέθοδος διαμόρφωσης της κατανόησης των μαθητών για την τυπική έννοια της σύγκλισης. Το προτεινόμενο από την Przenioslo διδακτικό εργαλείο φαίνεται πως δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν αντιλήψεις που είναι όλο και πιο κοντά στην έννοια του ορίου μιας ακολουθίας.

Ένα άλλο λάθος που θα προκύψει είναι το γεγονός ότι συγχέεται η σύγκλιση σειράς με την σύγκλιση ακολουθιών. Όπως έχει αναφερθεί σε μελέτες (Earls, 2017, Tall & Schwarzenberger, 1978), αυτό το σφάλμα μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη ικανότητας των μαθητών να αναγνωρίσουν την λεπτή διαφορά μεταξύ της σύγκλισης των όρων μίας ακολουθίας α_ν και της σύγκλισης της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων των όρων της ακολουθίας α_ν .

Άλλο σφάλμα που αντιμετωπίστηκε ήταν ότι ορισμένοι μαθητές υπέθεσαν ότι μία σειρά δεν έδινε συμπέρασμα ως προς την σύγκλιση (ή την απόκλιση), όταν το κριτήριο που εφαρμόστηκε για την εξέταση σύγκλισης ή μη της σειράς, δεν έδινε αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, οι μαθητές εστίασαν στα αποτελέσματα των κριτηρίων σύγκλισης, αλλά δεν συνειδητοποίησαν ότι η σειρά, ως όριο άπειρης ακολουθίας μερικών αθροισμάτων θα πρέπει να είναι είτε συγκλίνουσα είτε αποκλίνουσα! Δηλαδή, ότι μια σειρά συγκλίνει εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει (δηλαδή το όριό της υπάρχει και είναι πεπερασμένο), ή μια σειρά αποκλίνει εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αποκλίνει (δηλαδή το όριό της δεν υπάρχει ή είναι το $\pm\infty$).

Επιπλέον, όπως αναφέρεται από τον Martin (2009), ορισμένοι από τους μαθητές θεώρησαν τον έλεγχο του νιοστού όρου της ακολουθίας ως επαρκή προϋπόθεση για τη σύγκλιση μιας σειράς. Ωστόσο, ο έλεγχος του νιοστού όρου είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να συγκλίνει μια σειρά (π.χ. αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει τότε $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$). Με άλλα λόγια, ο έλεγχος του νιοστού όρου χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της απόκλισης μιας σειράς (δηλαδή, αν $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu \neq 0$, τότε η σειρά αποκλίνει)! Έτσι, ορισμένοι μαθητές αποτυγχάνουν να κατανοήσουν ότι η απαραίτητη συνθήκη σύγκλισης μιας σειράς χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί ότι μια σειρά αποκλίνει!

Ακόμη, η πρόταση ότι εάν μια σειρά συγκλίνει, το όριο του γενικού όρου μιας σειράς είναι μηδέν ερμηνεύεται από κάποιους μαθητές λανθασμένα ότι εάν το όριο του γενικού όρου μιας σειράς τείνει στο μηδέν, τότε η σειρά είναι συγκλίνουσα. Αυτή η παρερμηνεία οδήγησε ορισμένους μαθητές αυτής της μελέτης στη σκέψη ότι η σειρά ήταν συγκλίνουσα όταν βρήκαν το όριο του γενικού όρου της σειράς να είναι μηδέν (ενώ στην πραγματικότητα, για παράδειγμα, η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ αποκλίνει[10] ενώ η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu}}$ συγκλίνει[11]).

Αυτό το είδος λάθους μπορεί να εξηγηθεί από την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης ως αποτέλεσμα της αδυναμίας των μαθητών να συνειδητοποιήσουν την (λεπτή) διαφορά μεταξύ της λογικής συνθήκης $p \Longrightarrow q$ και της αντιθετοαντίστροφής της $q' \Longrightarrow p'$.

Εμπόδια στην εκμάθηση άπειρων σειρών μπορούν επίσης να παρατηρηθούν εξετάζοντας την ιστορία των μαθηματικών. Ο Bagni (2000, 2005) το έκανε αυτό λαμβάνοντας υπόψη την

[10] https://www.wolframalpha.com/input?i=sum%28+1%2Fsqrt%28n%29%29
[11] https://www.wolframalpha.com/input?i=sum%28+%28-1%29%5En%2Fsqrt%28n%29%29

γνώμη μαθητών για τη σειρά του Guido Grandi, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ (διαδοχικά +1 και –1). Ο Grandi (1671-1742) παρατήρησε ότι μπορούσε να πάρει είτε το 1 ή είτε το 0 ως τιμή αθροίσματος για την σειρά αυτή.

Σύμφωνα με αυτόν: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$ του οποίου το άθροισμα πρέπει να είναι 0 και $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots$ του οποίου το άθροισμα θα έπρεπε να είναι 1.

Ο Grandi έθεσε επίσης x=1 στην έκφραση $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-x)^{\nu} = \frac{1}{1+x}$ για να πάρει ότι 1–1+1–1+1–1... = $\frac{1}{2}$ (παρόλο που σήμερα ξέρουμε ότι αυτό δεν επιτρέπεται/ισχύει).

Οι μαθηματικοί του 17ου και 18ου αιώνα, θεωρώντας μια σειρά ως ένα άπειρο άθροισμα, επέτρεπαν στους εαυτούς τους να συσχετίσουν (αθροίσουν) όρους με διαφορετικούς τρόπους, ενώ ο σύγχρονος ορισμός του αθροίσματος μιας σειράς συσχετίζει τους όρους μόνον ως $\left(\left(\left((\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3\right) + \alpha_4\right) + \alpha_5\right) + \alpha_6 + \cdots$

Η διαισθητική κατανόηση των άπειρων σειρών ως άπειρων αθροισμάτων αποτελεί εμπόδιο για την τυπική κατανόησή τους. Για ορισμένους μαθητές, η φύση μιας άπειρης διαδικασίας είναι τέτοια που μπορεί να μην ολοκληρωθεί σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα και έτσι η άθροιση μιας σειράς είναι βέβαιο ότι θα παραμείνει χωρίς σαφές τελικό αποτέλεσμα (Sierpińska, 1987).

Αυτό μπορεί να φανεί σε μαθητές που δεν έχουν λάβει (ή συλλάβει) την τυπική εκπαίδευση, όπως αναφέρουν οι Fishbein, Tirosh και Melamed (1981), όπου η δυνατότητα μέτρησης της «διαισθητικής αποδοχής» διερευνάται λαμβάνοντας υπόψη δύο διαστάσεις: το επίπεδο της αυτοπεποίθησης/βεβαιότητας και τον βαθμό της προφάνειας.

Προς απόδειξη τούτου, οι Fischbein και λοιποί συμπεριέλαβαν τα ακόλουθα δύο προβλήματα σε ένα ερωτηματολόγιο:

1) Δίνεται τμήμα $AB = 1m$. Ας υποθέσουμε ότι προστίθεται σε αυτό ένα άλλο τμήμα $BC = \frac{1}{2}m$. Ας συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, προσθέτοντας τμήματα $CD = \frac{1}{4}m, DE = \frac{1}{8}m$ κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία προσθήκης τμημάτων, όπως περιεγράφηκε παραπάνω, θα τελειώσει; (συμπεριλαμβανόταν ένα σχέδιο).
2) Ας εξετάσουμε ξανά (την προηγούμενη) ερώτηση. Ποιο θα είναι το άθροισμα των τμημάτων $AB + BC + CD + DE + \cdots$;

Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε σε περισσότερους από 100 μαθητές και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι:

- Οι περισσότεροι δέχονται το άπειρο της διαδικασίας που περιγράφεται στο ερώτημα (1) με υψηλό βαθμό διαισθητικής αποδοχής.
- Πολύ λίγοι μαθητές απάντησαν ότι το αποτέλεσμα του αθροίσματος στην ερώτηση (2) είναι το 2 και αυτοί που το έκαναν είχαν πολύ χαμηλό επίπεδο διαισθητικής αποδοχής.
- Η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε μια απάντηση διαφορετική από το 2 στην ερώτηση (2), αλλά θεώρησαν ότι η απάντησή τους είχε σχετικά υψηλό επίπεδο διαισθητικής αποδοχής. Μεταξύ των απαντήσεων που δόθηκαν ήταν ότι το άθροισμα είναι ίσο με το άπειρο και ότι το άθροισμα «μόνο πλησιάζει» το 2.

Τελικά οι Fischbein και λοιποί καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι ακόμη και μετά την τυπική εκμάθηση, οι μαθητές συνήθως συνεχίζουν να αντιλαμβάνονται τις σειρές ως μια απείρως ατελείωτη διαδικασία.

5. Σχέδιο μαθήματος

Το σχέδιο μαθήματος που ακολουθεί (και τα φύλλα εργασίας) αναφέρονται σε συγκεκριμένα σημεία του ΝΠΣ. Συγκεκριμένα:

1. Συγκλίνουσες ακολουθίες
2. Μη συγκλίνουσες ακολουθίες
3. Μονοτονία και σύγκλιση
4. Γεωμετρικές πρόοδοι με λόγο $|\lambda| < 1$

Τι ζητάμε από τους μαθητές:

- Να προσδιορίσουν ακολουθίες και σειρές
- Να αναφέρουν τους όρους μιας ακολουθίας
- Να γράψουν έναν τύπο για τον νιοστό όρο μιας ακολουθίας
- Να προσδιορίσουν εάν μια ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει
- Να προσδιορίσουν γεωμετρικές σειρές
- Να υπολογίσουν το άθροισμα των συγκλινουσών γεωμετρικών προόδων

5.1. Συγκλίνουσες ακολουθίες (1 διδακτική ώρα)

Εδώ γίνεται μια εισαγωγή στην έννοια της συγκλίνουσας ακολουθίας. Παρουσιάζεται η (συγκλίνουσα) ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ και γίνεται αντιπαραβολή της με την (αποκλίνουσα) ακολουθία $\alpha_\nu = \nu$. Παράλληλα γίνεται στον πίνακα μία πρόχειρη γραφική παράσταση.

Στην συνέχεια γίνεται υπολογισμός μερικών πρώτων όρων της $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}$ και πρόχειρη γραφική παράσταση.

Εφόσον είναι εφικτό (σε εργαστήριο υπολογιστών) γίνεται από τους μαθητές χρήση του GeoGebra για παρατήρηση της γραφικής παράσταση και οπτικοποίηση της έννοιας της σύγκλισης (ή απόκλισης) για μεγάλα ν.

Παρόμοια και για την $\alpha_\nu = \alpha^\nu$ με $|\alpha| < 1$.

5.2. Μη συγκλίνουσες ακολουθίες (1 διδακτική ώρα)

Γίνεται αναφορά σε δύο συνηθισμένες/απλές ακολουθίες που δεν συγκλίνουν:

- $\alpha_\nu = \nu$
- $\beta_\nu = (-1)^\nu$

με απλή αναφορά μερικών πρώτων τιμών (όρων) και την παρατήρηση ότι στην πρώτη οι όροι τείνουν στο άπειρο (μεγαλώνουν απεριόριστα) και στην δεύτερη ότι οι όροι είναι εναλλάξ +1 και –1 που προφανώς δεν συγκλίνουν κάπου.

5.3. Μονοτονία και σύγκλιση (1 διδακτική ώρα)

Εδώ οι μαθητές διαπιστώνουν το κριτήριο ότι κάθε αύξουσα και φραγμένη άνω ή φθίνουσα και φραγμένη κάτω είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

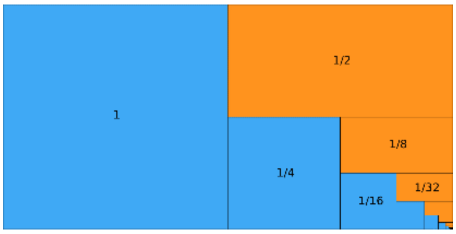
Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται η ακολουθία: $a_1 = 1,\ \ a_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu}$, πρώτα με γραφική παράσταση με το GeoGebra (εάν είναι εφικτό) και απόδειξη με τον «*ε-l*» ορισμό.

Επιπλέον οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν η $\beta_\nu = (-1)^\nu$ ότι είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει, ενώ οι υπακολουθίες της $\beta_{2\nu}$ και $\beta_{2\nu+1}$ συγκλίνουν η κάθε μία ξεχωριστά (σε διαφορετικό αριθμό), βγάζοντας το συμπέρασμα ότι η ιδιότητα του φραγμένου είναι συνέπεια της σύγκλισης, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

5.4. Γεωμετρικές πρόοδοι με λόγο $|\lambda| < 1$ (1 διδακτική ώρα)

Εδώ οι μαθητές θυμούνται τις προυπάρχουσες γνώσεις που έχουν διδαχθεί σχετικά με την γεωμετρική πρόοδο και παρατηρούν ότι υπάρχει νόημα στο να αθροίσει κανείς τους άπειρους όρους μίας τέτοιας ακολουθίας εφόσον για τον λόγο της ισχύει $|\lambda| < 1$.

Γίνεται χρήση του σχήματος για την απεικόνιση της περατότητας της σειράς της γεωμετρικής προόδου με $\lambda = \frac{1}{2}$, όπου το κάθε επιμέρους εμβαδόν αντιστοιχεί σε έναν όρο της προόδου, με το συνολικό εμβαδόν να αντιστοιχεί στην σειρά, με άθροισμα 2.



Στους οι μαθητές δίνονται οι παρακάτω ακολουθίες για να εντοπίσουν ποιες από αυτές είναι γεωμετρικές πρόοδοι και σε ποιες μπορούν να βρουν το άθροισμα των άπειρων όρων τους. Έτσι θα δείξουν ότι έχουν καταλάβει την έννοια της γεωμετρικής προόδου με $|\lambda| < 1$ και την έννοια της σύγκλισης της σειράς σε πραγματικό αριθμό.

$$10,\ \frac{25}{2},\ -\frac{125}{8},\ \frac{625}{32},\ -\frac{3125}{128},\ \dots \qquad a_1 = \frac{1}{2},\ a_\nu = \frac{3\nu^4}{6^\nu}$$

$$a_1 = 5,\ a_\nu = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{\nu-1} \qquad a_1 = \frac{9}{8},\ a_\nu = \frac{1}{2}\cdot\frac{9^\nu}{4^\nu}$$

$$a_1 = \frac{7}{13},\ a_\nu = \frac{7}{13^\nu} \qquad a_1 = \frac{1}{3},\ a_\nu = \frac{1}{3}\pi^{\nu-1}$$

Ιδέα από: Bella, Ericka (2019). Introduction of infinite series in high school level calculus. John Carroll University Masters Essays. 122 (pp. 118-119).

Στην ίδια ενότητα τίθεται από τον εκπαιδευτικό το πρόβλημα: Τι εκφράζει η παράσταση 0,39999… όταν τα 9 είναι άπειρα;

Ζωιτσάκος, Σωτήρης (2010). Αντιλήψεις μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών για ρητούς αριθμούς με δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις. Διαπανεπιστημιακό ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Βιβλιοθήκη Σχολής Θετικών Επιστημών (σελ. 6).

6. Φύλλα εργασίας

Τι ζητούμε από τους μαθητές / Τι αναμένεται να απαντήσουν / Πιθανά λάθη και παρανοήσεις

6.1. Φύλλο εργασίας Α’

Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα

- Ερώτημα 1

Σκεφτείτε τρεις (δικές σας) συγκλίνουσες ακολουθίες.
Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους και τον γενικό (νιοστό) όρο για κάθε μία, χρησιμοποιώντας τον σωστό τρόπο γραφής.
Bella, Ericka (2019). Introduction of infinite series in high school level calculus. John Carroll University Masters Essays. 122 (p. 99).

Εδώ φαίνεται εάν οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια των ακολουθιών. Παρόλο το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν προηγούμενη γνώση αυτού του όρου, χρειάζονται μια ανανέωση/ανάσυρση από την μνήμη τους. Αν και οι ακολουθίες αναφέρονται στα Μαθηματικά Β’ Λυκείου Γενικής Παιδείας (ΝΠΣ σελ. 24), το επίκεντρο εκεί είναι μόνο οι αριθμητικές και οι γεωμετρικές πρόοδοι[12].

Σε αυτή την δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται να γράψουν τρεις συγκλίνουσες -και όχι τυχαίες- ακολουθίες. Τους ζητείται να αναφέρουν κάποιους πρώτους όρους, να βρουν μια έκφραση για τον νιοστό όρο.

Σε αυτή την δραστηριότητα ελπίζω ότι οι μαθητές θα προσπεράσουν την τετριμμένη $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ και θα προχωρήσουν π.χ. σε ακολουθίες με εναλλασσόμενους θετικούς και αρνητικούς όρους.

- Ερώτημα 2

Γράψτε μία (δική σας) γεωμετρική πρόοδο όπου οι άπειροι όροι της να αθροίζουν στο 6.
Bella, Ericka (2019). Introduction of infinite series in high school level calculus. John Carroll University Masters Essays. 122 (p. 123).

Εδώ έχουμε την συνέχεια του προηγούμενου προβλήματος. Οι μαθητές έχουν μάθει για τις γεωμετρικές προόδους, ωστόσο το ΝΠΣ έχει εστιάσει μέχρι τώρα σε «πεπερασμένες» γεωμετρικές προόδους (δηλ. στους πρώτους όρους, στον α_ν, ή στο άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων. Τώρα όμως επεκτείνεται στο άθροισμα των άπειρων όρων σε μία γεωμετρική πρόοδο.

Οι μαθητές πρέπει να σκεφτούν τι είναι γεωμετρική πρόοδος. Στην συνέχεια, θα πρέπει να βρουν τον λόγο της προόδου και να τον χρησιμοποιήσουν για να κρίνουν εάν αυτή συγκλίνει. Εάν η σειρά συγκλίνει, το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί.

- Ερώτημα 3

Διαβάστε το παρακάτω ανέκδοτο και εξηγείστε γιατί ο μπάρμαν έδωσε δύο μπίρες:
Ένα άπειρο πλήθος μαθηματικών μπαίνει σε ένα μπαρ με άπειρη χωρητικότητα πελατών. Ο πρώτος μαθηματικός ζητάει από τον μπάρμαν μια μπίρα. Πριν προλάβει να αντιδράσει ο μπάρμαν, ο δεύτερος μαθηματικός ζητά και αυτός μία μπίρα, αλλά στην μισή ποσότητα από αυτήν που ζήτησε ο πρώτος. Ο τρίτος ζητά την μισή από αυτήν που θα πιεί ο δεύτερος κ.ο.κ.

[12] Στο ΝΠΣ της Α’ Γυμνασίου (σελ. 14) περιγράφεται (χωρίς να κατονομάζεται) η έννοια της αριθμητικής προόδου μέσα από έργα αναπαράστασης κανονικοτήτων.

Ο μπάρμαν κοιτά την απείρως μεγάλη ομάδα μαθηματικών και τους δίνει δύο μπίρες. Στην συνέχεια λέει στους συγκεντρωμένους μαθηματικούς: «Εδώ είναι δύο μπίρες. Τώρα μοιραστείτε τις!»

Jones, Keith (2011). The topic of sequences and series in the curriculum and textbooks for schools in England: A way to link number, algebra and geometry. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks, East China Normal University, Shanghai, China (p. 1).

Εδώ έχουμε ένα κλασικό πρόβλημα μαθηματικοποίησης. Παρόλο που δεν υπάρχει στον πραγματικό κόσμο η έννοια των άπειρων μαθηματικών μέσα σε ένα μπαρ (οι μαθηματικοί στο σχολείο, μαθηματικοί στην Ελλάδα, οι μαθηματικοί σε ολόκληρο τον κόσμο είναι πεπερασμένος αριθμός), οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ένα πρόβλημα που περιέχει την ιδέα του άπειρου πλήθους και τις άπειρης χωρητικότητας. Κάποιοι μαθητές που δεν θα κατανοήσουν ακριβώς το ζητούμενο του προβλήματος θα επικεντρώσουν την προσοχή τους στις τελευταίες λέξεις του κειμένου δηλαδή στο πώς θα μοιραστεί η μπίρα στους μαθηματικούς ενώ το πρόβλημα είναι να δικαιολογήσουν γιατί η ποσότητα είναι δύο μπίρες.

Όπως έχει αναφερθεί και στην § 4.3 (Αναμενόμενες δυσκολίες, πιθανά λάθη και παρανοήσεις), το αξιοσημείωτο για τους μαθητές, στο παραπάνω παράδειγμα, είναι το γεγονός ότι ενώ το πλήθος των όρων του αθροίσματος είναι άπειρο, το αποτέλεσμα είναι πεπερασμένο.

Με άλλα λόγια, όταν μια ακολουθία αριθμών είναι άπειρη, ο όρος «άπειρη» χρησιμοποιείται για να τονίσει το γεγονός ότι η ακολουθία απαρτίζεται από ένα άπειρο πλήθος όρων και όχι ότι συγκλίνει στο άπειρο.

6.2. Φύλλο εργασίας Β΄

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

- Ερώτημα 1

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων και τους δίνεται το παρακάτω θέμα. Θα πρέπει στην υπόλοιπη διδακτική ώρα να το μελετήσουν και στην επόμενη ώρα να συζητήσουν συγκρίνοντας τις απαντήσεις που έδωσαν για αυτό. Για την μελέτη προτείνεται να γίνει και μία πρόχειρη γραφική παράσταση για κάθε μία ακολουθία ώστε να λειτουργήσει βοηθητικά στις σκέψεις τους.

Ποια κοινή ιδιότητα έχουν οι ακολουθίες α_ν (1 έως 11) που **δεν έχει** η β_ν;

1. $\alpha_\nu = \begin{cases} 2 \ \text{για}\ \nu = 1.000.000 \\ 1+\frac{1}{\nu} \ \text{για}\ \nu \neq 1.000.000 \end{cases}$

2. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{2} \ \text{για}\ 1.000.000 \leq \nu < 10.000.000 \\ 1-\frac{1}{\nu} \ \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$

3. $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$

4. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \nu < 1.048.576 \\ 1+\frac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \nu \geq 1.048.576 \end{cases}$

5. $\alpha_\nu = 1$

6. $\alpha_\nu = \begin{cases} 1-\frac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \nu < 125 \\ 1 & \gamma\iota\alpha\ \nu \geq 125 \end{cases}$

7. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \nu < 10.000 \\ 1 & \gamma\iota\alpha\ \nu \geq 10.000 \end{cases}$

8. $\alpha_\nu = \begin{cases} -3 & \gamma\iota\alpha\ 200.000 \leq \nu \leq 500.000 \\ 1-\frac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi\alpha\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$

9. $\alpha_\nu = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$

10. $\alpha_\nu = \begin{cases} 1 & \acute{o}\tau\alpha\nu\ \tau o\ \nu\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 10 \\ 1+\frac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi\alpha\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$

11. $\alpha_\nu = \begin{cases} \alpha & \gamma\iota\alpha\ \nu < 10 \\ 1-\frac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \nu \geq 10 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, τυχαίος αριθμός

$$\beta_\nu = \begin{cases} 2 & \acute{o}\tau\alpha\nu\ \tau o\ \nu\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 10 \\ 1+\dfrac{1}{\nu} & \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi\alpha\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Przenioslo, Malgorzata. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. Educational Studies in Mathematics, (pp. 76-77).

Το παραπάνω αποτελεί μία σύνοψη όλων των ιδιοτήτων και εννοιών γύρω από τις συγκλίνουσες ακολουθίες με ενσωματωμένα διάφορα χαρακτηριστικά στα οποία συμβαίνουν παρανοήσεις από τους μαθητές, αποτελώντας ένα σκόπιμα επιλεγμένο σύνολο παραδειγμάτων/προβλημάτων/ερωτήσεων για την διδασκαλία και την εκμάθηση της τυπικής έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας.

Όλα αυτά οργανώνονται υπό την μορφή συζητήσεων στην τάξη, με την καθοδήγηση του δασκάλου καθώς όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, ένας από τους λόγους αφελών ή εσφαλμένων αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας είναι η χρήση στην διδασκαλία, μόνο ενός πολύ περιορισμένου εύρους «τυποποιημένων» παραδειγμάτων που δεν μπορούν να επισημάνουν λεπτομέρειες του επίσημου ορισμού.

Η επιλογή των συγκεκριμένων ακολουθιών στο πρόβλημα στοχεύει στην αποφυγή αυτού του διδακτικού λάθους. Οι έντεκα ακολουθίες α_ν επιλέχθηκαν έτσι ώστε να περιλαμβάνουν διάφορες περιπτώσεις σύγκλισης στον αριθμό 1. Η χρήση όχι μόνο συνηθισμένων τύπων (ακολουθίες 3, 5 και 9) αλλά και πολλαπλών τύπων (με κλάδους) ήταν ένας τρόπος για να επιτευχθεί η επιθυμητή ποικιλία.

Ένας άλλος τρόπος για την αύξηση της ποικιλίας ήταν η επιλογή των ακολουθιών έτσι ώστε να αντιμετωπιστούν άμεσα ορισμένες από τις βασικές δυσκολίες που σχετίζονται με την κατανόηση της έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας που έχουν αναφερθεί (βλ. § 4.3). Για παράδειγμα, οι ακολουθίες 5, 6, 7, 8 και 10 σχεδιάστηκαν για να βοηθήσουν να ξεπεραστεί η διαισθητική πεποίθηση ότι οι όροι μιας ακολουθίας δεν επιτρέπεται να φτάνουν στο όριό της.

Τρίτος τρόπος είναι πως μία από αυτές (ακολουθία 9) δεν είναι μονότονη, κάτι που στοχεύει στην πεποίθηση των μαθητών ότι η ύπαρξη μονοτονίας (ολικής ή από ένα ορισμένο δείκτη και μετά) είναι απαραίτητη για να υπάρχει το όριο.

Επιπλέον, υπάρχει η προσδοκία ότι, κατά τη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων, οι μαθητές θα παρατηρούσαν τη μη συνάφεια της συμπεριφοράς ενός πεπερασμένου αριθμού αρχικών όρων, σε σχέση με την «κοινή ιδιότητα» που αναζητούν.

Για τον σκοπό αυτό, υπάρχουν διάφορες παραλλαγές μιας τέτοιας αρχικής συμπεριφοράς: ένας ή (πεπερασμένα) περισσότεροι όροι συμπεριφέρονται διαφορετικά από τους υπόλοιπους (ακολουθίες 1, 2, 8). οι αρχικοί όροι είτε πλησιάζουν όλο και περισσότερο στο όριο, αλλά ο τύπος αλλάζει σε ένα ορισμένο σημείο (ακολουθία 6), απομακρύνονται από το όριο (ακολουθίες 4, 7) ή καθένας από αυτούς μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό (η ακολουθία 11 είναι μια «άπειρη οικογένεια» ακολουθιών).

Επιπλέον σε μερικές ακολουθίες η συμπεριφορά αλλάζει -επίτηδες- μετά από ένα μεγάλο πλήθος αρχικών όρων, για να αντικρουστεί η διαδεδομένη πεποίθηση των μαθητών ότι «πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων» σημαίνει «μικρό πλήθος αρχικών όρων».

Αυτές οι ακολουθίες αναμένεται επίσης να προκαλέσουν μια συζήτηση για την έννοια του άπειρου ως πολύ μεγάλου αριθμού, που πιθανώς πιστεύουν ορισμένοι μαθητές (και όχι μόνο!).

Σημειώνεται ότι η διατύπωση του προβλήματος δεν περιέχει έτοιμες γραφικές παραστάσεις των ακολουθιών. Στο προτεινόμενο φύλλο εργασίας, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν δικές τους γραφικές παραστάσεις.

Τελικά αυτή η δραστηριότητα αναμένεται να τους βοηθήσει να παρατηρήσουν ότι, για τις ακολουθίες α_ν ξεκινώντας από έναν συγκεκριμένο δείκτη, όλοι οι επόμενοι όροι αρχίζουν να συμπεριφέρονται με συγκεκριμένο τρόπο, κάτι που δεν συμβαίνει για την ακολουθία β_ν .

Τέλος, υπάρχει περίπτωση οι σύνθετοι τύποι (με κλάδους) και η αλλαγή της συμπεριφοράς των όρων σε ορισμένα σημεία να ωθήσουν ορισμένους μαθητές ώστε να βρουν «μερικά όρια» σε υποακολουθίες ή σε αρχικούς όρους ακολουθιών, καθώς και να σκεφτούν για την ύπαρξη ορίου όχι μόνο στο άπειρο αλλά και σε κάποιο συγκεκριμένο φυσικό αριθμό. Ως εκ τούτου, το πρόβλημα προσφέρει στον εκπαιδευτικό ευκαιρίες να συζητήσει και να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν και αυτές τις παρανοήσεις σε σχέση με την τυπική έννοια του ορίου.

7. Βιβλιογραφικές αναφορές

1. Alcock, L., Simpson, A. (2009). Ideas from mathematics education: An introduction for mathematicians. MSOR Network.
2. Bagni, G. T. (2000). Difficulties with series in history and in the classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (82-86), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
3. Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. International Journal for Mathematics Teaching and Learning
4. Bella, E. (2019). Introduction of infinite series in high school level calculus. John Carroll University Masters Essays. 122.
5. Champney, D. D. (2013). *Explaining infinite series-An exploration of students' images* (Unpublished doctoral dissertation). University of California, Berkeley.
6. Davis, R. B., Maher, C. A., and Noddings, N. (eds.): 1990, Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics-Monograph 4, *Journal for Research in Mathematics Education* 21(4).
7. Earls, D. J. (2017). *Students' misconceptions of sequences and series in second semester calculus* (Unpublished doctoral dissertation). University New Hampshire.
8. Education Services Australia (2013). Sequences and series - A guide for teachers (Years 11-12).
9. Elias, D. (2019). The Convergence Concept in High School Constructing Knowledge about Convergence and Limits, Thesis submitted for the MA degree of Humanities, Program in Education of Secondary School Mathematics, Tel Aviv University, The Jaime and Joan Constantiner, School of Education.
10. Fishbein, E., Tirosh, D., Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 491-512.
11. Ghazali, N. H. C., Zakaria, E. (2011). Students' Procedural and Conceptual Understanding of Mathematics. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 5(7), 684-691.
12. Hadamard, J, (1949). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
13. Jones, K. (2011). The topic of sequences and series in the curriculum and textbooks for schools in England: A way to link number, algebra and geometry. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks, East China Normal University, Shanghai, China.
14. Kilpatrick, J., Swafford, J. O., Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
15. Lecorre, T. (2016). Rationality and concept of limit. First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France, Proceedings of INDRUM 2016, 83-92.
16. Martin, J. (2009). *Expert conceptualizations of the convergence of Taylor series: Yesterday, today, and tomorrow* (Unpublished doctoral dissertation). University of Oklahoma.
17. Martínez-Planell, R., Gonzalez, A., DiCristina, G., Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics*, *81*, 235-249.
18. Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2 & 3), 239-257.
19. Morales, Z. A. (2014). Analysis of Students' Misconceptions and Error Patterns in Mathematics: The Case of Fractions, *Fraction Error Pattern*.
20. Nardi, E., Biza, I., González-Martín, A. (2008). Introducing the concept of infinite sum: Preliminary analyses of curriculum content. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 28(3), 84-89.

21. National Council of Teachers of Mathematics - NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics, 35(51).
22. Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.
23. Piaget, J. (1973). *To Understand is to Invent: The Future of Education*, Grossman Publishers, New York.
24. Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educ Stud Math* 60, 71-93.
25. Rittle-Johnson, B. Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*. 91. 175-189.
26. Schneider, M., Stern, E. (2005). Conceptual and procedural knowledge of a mathematics problem: Their measurement and their causal interrelations. *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 27(27).
27. Schüler-Meyer, A. (2018). Defining as discursive practice in transition – Upper secondary students reinvent the formal definition of convergent sequences. INDRUM Network, University of Agder, Apr 2018, Kristiansand, Norway.
28. Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
29. Sierpińska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics* 10(3), 24-36. FlM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.
30. Sierpińska A., (1994), Understanding in Mathematics, The Falmer Press, London, UK.
31. Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
32. Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
33. Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.
34. Steen, L. (Ed.) (1988). *Calculus for a new century*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
35. Steffe, L.P. Gale, J. (eds) (1995), *Constructivism in Education*, Lawrence Erlbaum Association Publishers, Hillsdale, New Jersey
36. Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Plenary presentation in Working Group 3*, ICME (pp. 13-28). Quebec, Canada.
37. Tall, D., Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.
38. Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
39. White, P., Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.
40. Ζωιτσάκος Σ. (2010). Αντιλήψεις μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών για ρητούς αριθμούς με δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις. *Διαπανεπιστημιακό ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών*, Βιβλιοθήκη Σχολής Θετικών Επιστημών (σελ. 6).

8. Παράρτημα

8.1. Φύλλο εργασίας Α΄

1. Σκεφτείτε τρεις (δικές σας) συγκλίνουσες ακολουθίες.
   Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους και τον γενικό (νιοστό) όρο για κάθε μία, χρησιμοποιώντας τον σωστό τρόπο γραφής.

2. Γράψτε μία (δική σας) γεωμετρική πρόοδο όπου οι άπειροι όροι της να αθροίζουν στο 6.

3. Διαβάστε το παρακάτω ανέκδοτο και εξηγείστε γιατί ο μπάρμαν έδωσε δύο μπίρες:

   > Ένα άπειρο πλήθος μαθηματικών μπαίνει σε ένα μπαρ με άπειρη χωρητικότητα πελατών. Ο πρώτος μαθηματικός ζητάει από τον μπάρμαν μια μπίρα. Πριν προλάβει να αντιδράσει ο μπάρμαν, ο δεύτερος μαθηματικός ζητά και αυτός μία μπίρα, αλλά στην μισή ποσότητα από αυτήν που ζήτησε ο πρώτος. Ο τρίτος ζητά την μισή από αυτήν που θα πιεί ο δεύτερος κ.ο.κ.
   >
   > Ο μπάρμαν κοιτά την απείρως μεγάλη ομάδα μαθηματικών και τους δίνει δύο μπίρες.
   >
   > Στην συνέχεια λέει στους συγκεντρωμένους μαθηματικούς: «Εδώ είναι δύο μπίρες. Τώρα μοιραστείτε τις!»

8.2. Φύλλο εργασίας Β΄

Ποια κοινή ιδιότητα έχουν οι ακολουθίες α_ν (1 έως 11) που **δεν έχει** η β_ν;

1. $\alpha_\nu = \begin{cases} 2 \ \text{για}\ \nu = 1.000.000 \\ 1+\frac{1}{\nu}\ \text{για}\ \nu \neq 1.000.000 \end{cases}$

2. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{2}\ \text{για}\ 1.000.000 \leq \nu < 10.000.000 \\ 1-\frac{1}{\nu}\ \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$

3. $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$

4. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu < 1.048.576 \\ 1+\frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu \geq 1.048.576 \end{cases}$

5. $\alpha_\nu = 1$

6. $\alpha_\nu = \begin{cases} 1-\frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu < 125 \\ 1 & \text{για}\ \nu \geq 125 \end{cases}$

7. $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu < 10.000 \\ 1 & \text{για}\ \nu \geq 10.000 \end{cases}$

8. $\alpha_\nu = \begin{cases} -3 & \text{για}\ 200.000 \leq \nu \leq 500.000 \\ 1-\frac{1}{\nu} & \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$

9. $\alpha_\nu = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$

10. $\alpha_\nu = \begin{cases} 1 & \text{όταν το}\ \nu\ \text{είναι πολλαπλάσιο του}\ 10 \\ 1+\frac{1}{\nu} & \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$

11. $\alpha_\nu = \begin{cases} \alpha & \text{για}\ \nu < 10 \\ 1-\frac{1}{\nu} & \text{για}\ \nu \geq 10 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, τυχαίος αριθμός

$$\beta_\nu = \begin{cases} 2 & \text{όταν το}\ \nu\ \text{είναι πολλαπλάσιο του}\ 10 \\ 1+\frac{1}{\nu} & \text{για όλα τα υπόλοιπα}\ \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

8.3. Πρόγραμμα Σπουδών Γ' Λυκείου 1984 (σελ. 377)

2) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

α) Πραγματικοί αριθμοί πραγματικές συναρτήσεις

Το R ως διατεταγμένο σώμα. Η έννοια του φραγμένου διαστήματος. Άνω και κάτω φράγμα συνόλου Ε⊆R. Συνέπειες του κιβωτισμού. Απόλυτος τιμή πραγματικού, χρήσιμες ανισότητες. Πραγματικές συναρτήσεις. Ειδικές συναρτήσεις. Αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης. Μονοτονία συνάρτησης. Σύνολο τιμών συνάρτησης. Φραγμένη συνάρτηση. Αντίστροφη συνάρτηση. Η Μονοτονία της αντίστροφης συνάρτησης. Σύνθεση συναρτήσεων.

β) Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ακολουθίες με όριο μηδέν. Ακολουθία που φράσσεται από άλλη με όριο μηδέν. Πρόσθεση ακολουθιών με όριο μηδέν. Πολλαπλασιασμός ακολουθιών με όριο μηδέν. Πολλαπλασιασμός με φραγμένη ακολουθία.

Συγκλίνουσες ακολουθίες. Βασικές ιδιότητες. Σύγκλιση και πράξεις. Σύγκλιση και διάταξη. Μονοτονία και σύγκλιση. Ο αριθμός e

Μη συγκλίνουσες ακολουθίες. Ακολουθίες με όριο το ± ∞. Ακολουθίες που δεν έχουν όριο. Πράξεις με μη πεπερασμένα όρια. Απροσδιόριστες μορφές. Πράξεις και όρια.

γ) Όριο και συνέχεια συνάρτησης

Όριο συνάρτησης στο ± ∞. Οριζόντια ασύμπτωτη. Ιδιότητες του ορίου. Όρια και διάταξη. Πλάγια ασύμπτωτη. Όριο και συνέχεια συνάρτησης στο χο. Πλευρικά όρια και πλευρική συνέχεια. Ιδιότητες ορίου στο χο. Συνέχεια και πράξεις. Κριτήριο ύπαρξης ορίου συνάρτησης με ακολουθίες. Όριο σύνθεσης συναρτήσεων. Όρια και συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Συνέχεια σε κλειστό διάστημα. Μονοτονία και συνέχεια. Ιδιότητες εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης.

δ) Παράγωγος

Η έννοια της παραγώγου. Κινηματική και γεωμετρική σημασία παραγώγου. Πλευρική παράγωγος. Διαδοχικές παράγωγοι. Παράγωγος και συνέχεια. Παράγωγος βασικών συναρτήσεων και κανόνες παραγώγισης. Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων.

Ακρότατα συνάρτησης. Θεώρημα ROLLE. Θεώρημα μέσης τιμής και άμεσες συνέπειες.

Παράγουσα συνάρτηση. Απροσδιόριστες μορφές. Θεώρημα L' HOSPITAL. Μελέτη συνάρτησης: Μονοτονία, ακρότατα, κυρτά και κοίλα, σημεία καμπής. Εφαρμογές.

ε) Ολοκλήρωμα

Η έννοια του ολοκληρώματος. Υπολογισμός του ολοκληρώματος. Ιδιότητες ολοκληρώματος. Ολοκλήρωμα και διάταξη. Θεώρημα μέσης τιμής. Ολοκλήρωμα και παράγουσες. Μέθοδοι ολοκλήρωσης. Εφαρμογές. Υπολογισμός εμβαδών και όγκων.

ΕΤΟΣ	1984
ΑΡ. ΦΕΚ	35/Α΄(σελ. 377)
Π.Δ. / Υ.Α. κ.α.	23-Μαρ / Π.Δ. 91
ΤΙΤΛΟΣ / ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	Ωρολόγιο και Αναλυτικό Πρόγραμμα των Σχολείων Μέσης Γενικής εκπαίδευσης

http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/index.php

8.4. Νέο Πρόγραμμα Σπουδών Γ΄ Λυκείου (σελ. 42-43)

42 | *Μαθηματικά Α΄, Β΄ και Γ΄ Λυκείου*

ΑΛΓΕΒΡΑ		2x2 μέσω πινάκων. Αλ.Σχ.11.Π.2. Επιλύουν και διερευνούν γραμμικά συστήματα 2x2 με τη μέθοδο των οριζουσών και συσχετίζουν τις λύσεις με τις σχετικές θέσεις των ευθειών στο επίπεδο. Αλ.Σχ.11.Π.3. Επιλύουν εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις. Αλ.Σχ.11.Π.4. Αποδεικνύουν τις ιδιότητες του λογαρίθμου. Αλ.Σχ.11.Π.5. Επιλύουν λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις.	φαινομένων ή προβλημάτων μέσω γραμμικών συστημάτων και επίλυσή τους μέσω του επαυξημένου ή του αντίστροφου πίνακα. • Προβλήματα στα οποία αξιοποιείται ο αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα, για παράδειγμα κωδικοποίηση μηνύματος μέσω της αντιστοίχισης των γραμμάτων του αλφαβήτου σε αριθμητικές τιμές (π.χ. κώδικας ASCII). • Επίλυση των εκθετικών και λογαριθμικών εξισώσεων μέσω της 1-1 ιδιότητας των αντίστοιχων εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων. • Επίλυση των εκθετικών και λογαριθμικών ανισώσεων μέσω της μονοτονίας των αντίστοιχων εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων.
ΑΝΑΛΥΣΗ	Σύγκλιση.	Αν.Σ.11.Π.1. Διερευνούν μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης την αναγκαιότητα εισαγωγής των άπειρων διαδικασιών και της σύγκλισης ακολουθίας. Αν.Σ.11.Π.2. Διερευνούν αριθμητικά και γραφικά τη σύγκλιση και τη μη σύγκλιση ακολουθιών της μορφής: α) $\alpha_\nu = 1/\nu$, β) $\alpha_\nu = \alpha^\nu$ με $\vert\alpha\vert < 1$ και γ) $\alpha_\nu = (-1)^\nu$. Αν.Σ.11.Π.3. Συμπεραίνουν εμπειρικά ότι μια ακολουθία μονότονη και φραγμένη συγκλίνει. Αν.Σ.11.Π.4. Μέσω προβλήματος	• Έργα μέσα από τα οποία αναγνωρίζεται η αναγκαιότητα των άπειρων διαδικασιών, μέσω προβλημάτων προσέγγισης άγνωστων ποσοτήτων με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια, όπως π.χ. η προσέγγιση του εμβαδού κύκλου από τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων. • Αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στη διερεύνηση της σύγκλισης ή της μη σύγκλισης ακολουθιών. • Έργα μέσα από τα οποία γίνεται διερεύνηση ως προς το αν μια ακολουθία είναι μονότονη και/ή φραγμένη αριθμητικά και/ή μέσω της γραφικής της παράστασης.

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ — ΕΣΠΑ 2014-2020 — ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

43 | *Μαθηματικά Α΄, Β΄ και Γ΄ Λυκείου*

ΑΝΑΛΥΣΗ		μοντελοποίησης οδηγούνται στην ακολουθία $\alpha_\nu = (1+1/\nu)^\nu$, συμπεραίνουν διαισθητικά ότι συγκλίνει και συμβολίζουν το όριό της με e. Αν.Σ.11.Π.5 Προσδιορίζουν αθροίσματα άπειρων όρων γεωμετρικών προόδων με λόγο λ, όπου $\vert\lambda\vert < 1$. Αν.Σ.11.Π.6. Εφαρμόζουν τη μέθοδο του Ήρωνα για να προσεγγίσουν την τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού.	• Εισαγωγή του αριθμού e, μέσω κατάλληλου προβλήματος, για παράδειγμα ανατοκισμού.